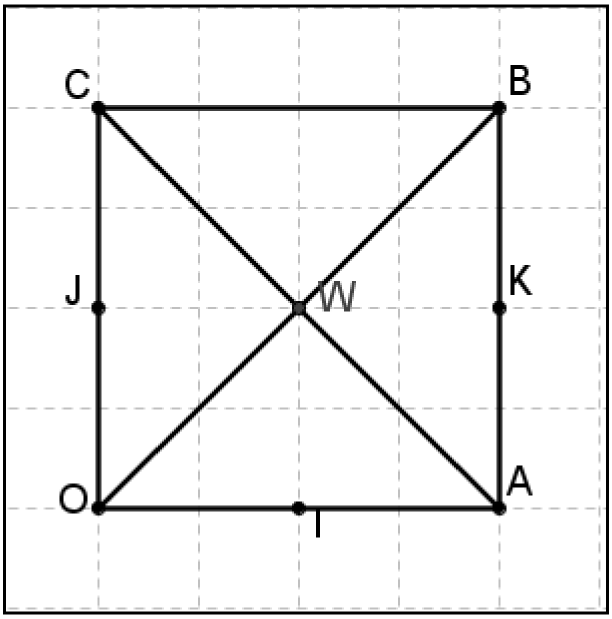
| | | |
|---|---|---|
| **L-B-H** | **Devoir de synthèse n°1** | **9/12/2014** |
| **Prof: M.Mohamed Krir** | **4 M** | **Durée : 3 h** |

## EXERCICE N°1 : (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des propositions données est exacte.

Donner la lettre qui correspond à la bonne réponse ( sans justification).




1) Soit f = $S_{(AC)}$ o $S_{(BO)}$.

( a ) f = $R_{(O,\frac{\pi}{2})}$ ( b ) f = $S_A$ ( c ) f = $S_w$

2) g = $t_{\overrightarrow{IK}}$ o $S_{(OB)}$

( a ) g admet un seul point fixe

( b ) l'ensemble des points fixes de g est une droite

(c ) g n'a pas de point fixe.

3) h = $S_{(AC)}$ o $S_{(BO)}$ o $S_{(AB)}$ o$S_{(BJ)}$

( a ) h est un antidéplacement

( b ) h conserve les mesures des angles orientés

( c ) h est l'identité du plan.

4) $f_1$ est une isométrie qui laisse le carré OABC globalement invariant

( a) $f_1$ transforme [AC] en [AB]

( b ) $f_1$ fixe la point W

( c ) $f_1$ est une symétrie glissante.

**EXERCICE N°2 : ( 5 points )**

U et V sont deux suites définies sur N par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ V_0 = 9 \end{cases}$ et $\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4V_n}{7} \\ V_{n+1} = \dfrac{2U_n + 5V_n}{7} \end{cases}$ , n $\in$ N.

1)a) Montrer que : $\forall$ n $\in$ N , $U_n \succ 0$ et $V_n \succ 0$

b) Montrer que : $\forall$ n $\in$ N , $U_n \leq V_n$

c) Montrer que U est croissante et V est décroissante.

2) On pose $W_n = V_n - U_n$ , $\forall$ n $\in$ N ,

a) Montrer que W est une suite géométrique et calculer $W_n$ en fonction de n.

b) Etablir que U et V sont deux suites adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite $\alpha$.

c) Prouver que : $U_7 \leq \alpha \leq V_6$

d) Déterminer un entier naturel p qui permet de donner un encadrement de $\alpha$ de longueur $10^{-5}$.

3) On pose $T_n = 3\ U_n + 6\ V_n$ , $\forall$ n $\in$ N .

a) Montrer que $(T_n)$ est une suite constante.

b) Déterminer alors la valeur de la limite $\alpha$.

**EXERCICE N° 3 : ( 4 points )**

Soit la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{4}[$ par f(x) = $\dfrac{1}{1-\tan x}$ .

1) Montrer que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}[$ sur un intervalle J à déterminer.

2) On pose g la fonction réciproque de f. Etablir que g est dérivable sur $[1 , +\infty[$ et que

g'($x$) = $\dfrac{1}{2x^2 - 2x + 1}$ .

3) On pose h($x$) = g$\left(\dfrac{1+\tan x}{2}\right)$ pour tout x $\in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ .

a) Prouver que h est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer h'(x).

b) En déduire que h(x) = x - $\frac{\pi}{4}$ pour tout x $\in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ .

**PROBLEME : ( 8 points )**

Soit dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation ( E ) :

$Z^3 - 2(3 + 2i)Z^2 + 2(4 + 9i)Z - 20i = 0.$

I ) 1)a) Vérifier que 2 est une solution de ( E ).

b) Résoudre l'équation ( E ).

2) On donne dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct ( O ,$\vec{U}, \vec{V}$ ) les points A ,B , et C d'affixes respectives : 2 , 3 + i et 1 + 3 i.

a) Placer les points A , B et C.

b) Déterminer la mesure principale de l'angle ($\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}$) et déduire la nature de ABC .

c) Vérifier que : BC = 2 AB et déterminer l'affixe du point D telle que ABCD est un rectangle.

3) Soient I et J les milieux respectifs des segments [AD] et [BC].

a) Déterminer les affixes de I et J.

b) Montrer qu'il existe une unique isométrie f telle que : f (A) = J, f(B) = C et f(J) = D.

c) Prouver que f admet un seul point fixe à déterminer.

d) Caractériser alors l'isométrie f.

4) On pose g = $R_{(I,\frac{\pi}{2})} o S_{(AB)}$

a) Vérifier que : $S_{(IC)} o S_{(IJ)} = R_{(I,\frac{\pi}{2})}$

b) Caractériser l'application : $S_{(IC)}$ o $S_{(AJ)}$ .

c) Déterminer la forme réduite de g.

II ) Soit h : P $\rightarrow$ P

M( z ) $\mapsto$ M'( z' ) avec : $z' = i\,\bar{z} + 1 + i$ .

On donne les points E ( 4 + 2 i ) et F( 2 + 4i ).

1) Montrer que h est une isométrie.

2) Prouver que h n'a pas de point fixe.

3)a) Déterminer h (A ) et vérifier que h( C ) = E.

b) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de h .

c) On désigne par K , L et W les milieux respectifs de [AC] , [BF] et [CE].

Monter que les points K , L et W sont alignés.

***BON TRAVAIL***